



# 國際數學競賽

INTERNATIONAL MATHEMATICS COMPETITION  
Changchun China, 27 July ~ 1 August 2015

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 个人赛试题

答题时间：120 分钟

#### 答题指引：

- 请勿翻开此页，直到听到答题指令为止。
- 请在下页的对应位置填写队名、您的姓名及编号。
- 个人赛试题包括两个部份，总分 120 分。
- 第一部份包括填充题 12 题，只须在空格内填写阿拉伯数值答案，以其他文字书写一律不计分，不须计算过程，若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。每题 5 分，答错不倒扣。
- 第二部份包括计算证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明，每题 20 分，根据答题情况给予部份分数。
- 本卷答题时间：120 分钟。
- 不得使用任何电子计算器具。
- 可使用铅笔、蓝色或黑色圆珠笔作答。
- 答题结束后，监考人员会将所有纸张收回。

Simplified Chinese Version

简体中文版

队名：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 编号：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

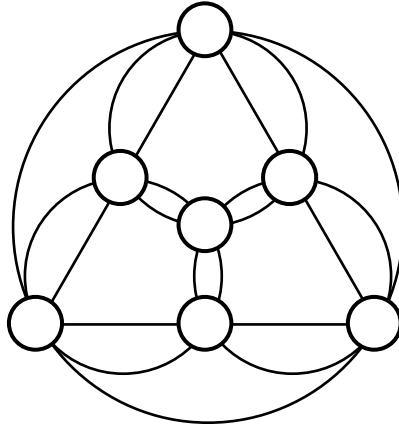
以下字段由评审填写，考生请勿做任何记号

题号	第一部份												第二部份			总分	评审 签名	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3			
分数																		
分数																		

第一部份：

填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 在下图的七个小圆圈中分别填入数字 1 至 7，使得最大的圆与每一个比小圆圈大的圆周上所填的数字之和为 6 的倍数。请问位于中间的小圆圈填入的数字是什么？



答：\_\_\_\_\_

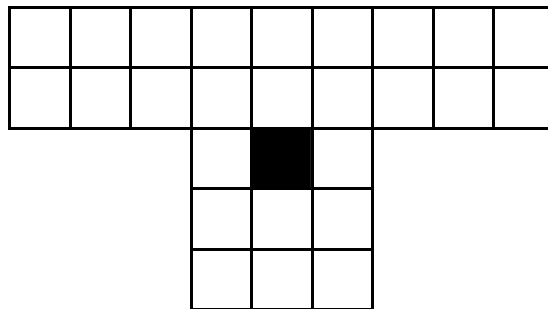
2. 已知正整数  $a$  的各个数码互不相同。把  $a$  的各个数码重新排列得到整数  $b$ 。若  $a-b$  的值的每个数码都是 1，请问  $a-b$  的最大可能值为多少？

答：\_\_\_\_\_

3. 已知在二十一个不同的整数中最大的数为 2015，而 101 是其中的一个数，并且满足任意十一个数之和大于另外十个数之和。请问这二十一个数的中位数（即它大于其中十个数、而小于剩下的十个数）是多少？

答：\_\_\_\_\_

4. 下图由 26 个白色小方格和一个黑色的小方格组成。请问图中有多少个不同的矩形？要求任何一个矩形由图中的白色小方格组成且不得包含黑色的小方格。



答：\_\_\_\_\_ 个

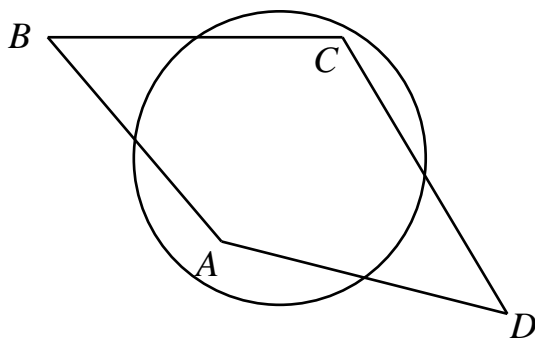
5. 现有一批蔬菜需要从农场运往城里，其中一部分用货车运输，剩下的部分用牛车运输。已知货车的速度为 65 km/小时，牛车的速度为 5 km/小时。出发一段时间后，有一架速度为 13 km/小时的马车转载货车上的蔬菜，并让货车回去转载牛车上的蔬菜。马车和货车同时到达距离农场 100 km 的目的地。假设卸除和装载蔬菜的时间忽略不计，请问这批蔬菜从农场运到目的地共费时多少小时？

答：\_\_\_\_\_ 小时

6. 请问共有多少组正整数对  $(x, y)$  满足  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{(x+1)y} = \frac{1}{2015}$ ？

答：\_\_\_\_\_ 组

7. 设凸四边形  $ABCD$  四条边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  的中点在同一个圆上。若  $AB=10$  cm、 $BC=11$  cm 且  $CD=12$  cm，请问边  $DA$  的长度是多少 cm？



答：\_\_\_\_\_ cm

8. 已知三个两位数  $\overline{ab}$ 、 $\overline{cd}$ 、 $\overline{ad}$  满足  $(\overline{ab})^2 + (\overline{cd})^2 = (\overline{ad})^2$ ，请问四位数  $\overline{abcd}$  的最小可能值为多少？

答：\_\_\_\_\_

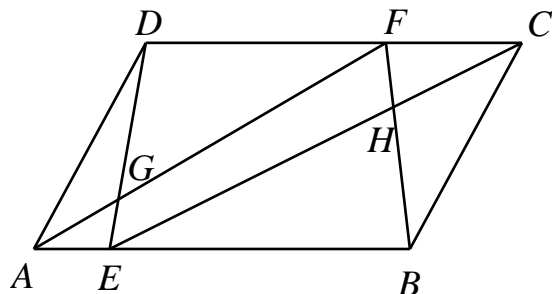
9. 每个  $1 \times 1$  塑料板的一组对边分别涂上红色与黄色，另一组对边分别涂上蓝色与绿色。现用 64 片这样的塑料板在墙上拼成一个  $8 \times 8$  图案，这些塑料板可以旋转或翻转。若两片塑料板相邻，则要求其共同边的颜色相同。请问总共可以拼成多少片不同的图案？

答：\_\_\_\_\_ 个

10. 请问所有能表示为  $\sqrt{7p^n + 9}$ （其中  $n$  为正整数、 $p$  为质数）这种形式的正整数之和是多少？

答：\_\_\_\_\_

11. 已知  $ABCD$  为平行四边形，点  $E$  为边  $AB$  上一点满足  $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{4}$ 、点  $F$  为边  $DC$  上一点， $AF$  与  $DE$  交于点  $G$ ， $CE$  与  $BF$  交于点  $H$ 。若  $ABCD$  的面积为  $1 \text{ cm}^2$ ， $\triangle BHC$  的面积为  $\frac{1}{8} \text{ cm}^2$ ，请问  $\triangle ADG$  的面积为多少  $\text{cm}^2$ ？



答：\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

12. 设五个不同的正整数满足：任取两个数（可以是同一个数取两次）求和，恰好共得到九种不同的和。对任意这样的五个数，请问能同时整除这五个数之和的整数之最大值是什么？

答：\_\_\_\_\_

第二部份：

计算与证明题，请在题目下空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

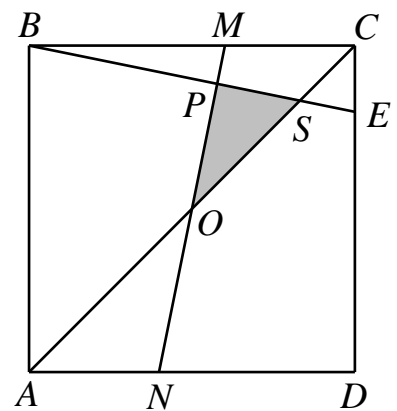
1. 若一个五位数为完全平方数且末两位数码相同，请问这样的五位数共有多少个？

答：\_\_\_\_\_ 个

2. 从 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九个数码中随机选出三个不同的数码并按递减顺序组成第一个数。用相同的方式构造第二个数，但不可以选数码 9。请问第一个数大于第二个数的概率为多少？

答：\_\_\_\_\_

3. 点  $E$ 、 $N$  分别在正方形  $ABCD$  的边  $DC$ 、 $DA$  上，满足  $AN:ND:DE=2:3:4$ 。过点  $N$  作  $BE$  的垂线与  $BE$  交于点  $P$ 、与  $BC$  交于点  $M$ 。  $AC$  与  $MN$  交于点  $O$ 、与  $BE$  交于点  $S$ 。请问  $\triangle OPS$  的面积与  $ABCD$  的面积的比值是多少？



答：\_\_\_\_\_