2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

10th

青少年数学国际城市邀请赛

个人赛试题

答题指引：

- 请勿翻开此页，直到听到答题指令为止。
- 请在下一页的对应位置填写队名、您的姓名及编号.
- 试题包括填充题 12 题，每题 5 分；计算证明题 3 题，每题 20 分.　本卷总分 120 分.
- 填充题只须在空格内填写**阿拉伯数字**答案，以其它文字书写一律不计分，不须计算过程，若题目有不只一个答案，则全部答对才给分.
- 计算证明题必须填写详细计算过程或证明，根据答题情况给分.
- 本卷答题时间：120 分钟.
- 不得使用任何电子计算器具.
- 请勿使用红色笔迹作答.
- 答题结束后，将回收本卷所有试题和草稿纸.

2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

个人赛试题

答题时间：120 分钟　　　　　　　　　　2009/07/08 南非 德班

队名：____________ 姓名：_____________ 编号：_________ 得分：_________

第一部份：填充题，请将答案填写在空格内，共十二题，每题 5 分.

1. 已知 a，b，c 为三个递增的连续奇数，试求 $a^2-2b^2+c^2$ 的值.

答：__________

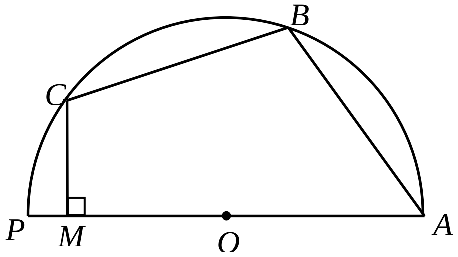
2. 将一个正整数 n 放入一个机器内将会产生出一个正整数 $\dfrac{n(n+1)}{2}$. 若我们将 5 放入机器内，将所产生出的数再放入机器内，请问机器最后产生出的数是什么？

答：__________

3. A、B、C 三人采西瓜. A 与 B 所采西瓜的个数之和比 C 少 6 个；B 与 C 所采西瓜的个数之和比 A 多 16 个；C 与 A 所采西瓜的个数之和比 B 多 8 个. 请问他们每人所采西瓜的个数之乘积是多少？

答：__________

4. 如图所示，一个半圆的圆心为 O. 一束光由点 M 沿垂直 PA 的方向射向半圆，光线在圆周上的点 C 处反射，反射角 $\angle OCB$ 等于入射角 $\angle MCO$；接着这束光再交圆周于点 B，依同样方式反射，最后光射入点 A. 请问 $\angle COM$ 为多少度？



答：__________

5. 年龄分别为 1~19 岁的十九个小孩围成一个圆圈，将所有相邻两个小孩的年龄的差值记录下来. 请问这十九个差的总和的最大值是多少？

答：__________

6. 化简求值 $\dfrac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)}$.

答：__________

7. 已知 A、B、C、D 是平面上不共圆的四点. $\Delta ABD, ADC, BCD, ABC$ 的外心分别为点 E、F、G、H，线段 EG 与 FH 交于点 I. 若 $AI=4$，$BI=3$，则 CI 的长度是多少？

答：__________

8. 某次考试，65 分为及格分数线，全班的总平均分为 66 分，而所有成绩及格的学生的平均分为 71 分，所有成绩不及格的学生的平均分为 56 分. 为了减少不及格的学生人数，老师给每位学生的成绩加上 5 分. 加分之后，所有成绩及格的学生的平均分变为 75 分，所有成绩不及格的学生的平均分变为 59 分. 已知该班学生人数介于 15 至 30 人之间，请问该班有多少位学生？

答：__________

9. 有多少个不同的直角三角形，以 2009^{12} 为一条直角边，且三条边都是整数？(全等三角形视为同一个三角形.)

答：__________

10. 若某个六位数，它的数码和可被 26 整除；这个六位数加 1，所得的数的数码之和也可被 26 整除. 请问满足上述条件的最小的六位数是什么？

答：__________

11. 在一圆周上有 1 个红点和 2009 个蓝点. 小丹计算所有顶点都是蓝点的凸多边形的个数，小克计算有一个顶点是红点的凸多边形的个数. 请问他们两人所得的数之差值是多少？

答：__________

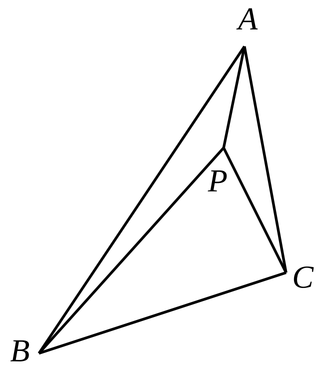
12. 小马在体育场卖饮料，矿泉水每瓶 4 元，汽水每瓶 7 元. 开始时他有 350 瓶饮料，虽然没有全部卖完，但是他的销售收入恰好是 2009 元. 试问：他至少卖出了多少瓶汽水？

答：__________

第二部份：计算及证明题，必须写出计算或证明过程. 共三题，每题 20 分.

1. 在一次国际象棋比赛中共有 10 位选手参赛，每位选手必须与其它选手恰好对弈一局. 经过数局比赛后，发现任意三位选手之间都至少有两个人尚未对弈. 请问截至此时，此棋赛最多已赛过多少局？

2. 点 P 为三角形 ABC 内部一点，使得$\angle PBC=30°$，$\angle PBA=8°$，且$\angle PAB=\angle PAC=22°$. 请问$\angle APC$ 为多少度？



3. 试求最小的正整数，它可以被表示为四个正整数的平方和，且可以整除某个形如2^n+15的整数，其中n为正整数.