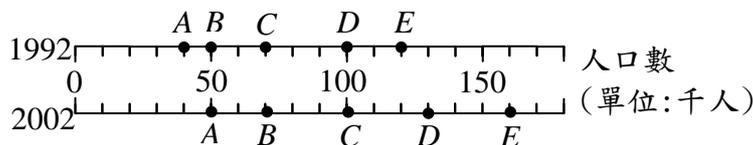


Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2002

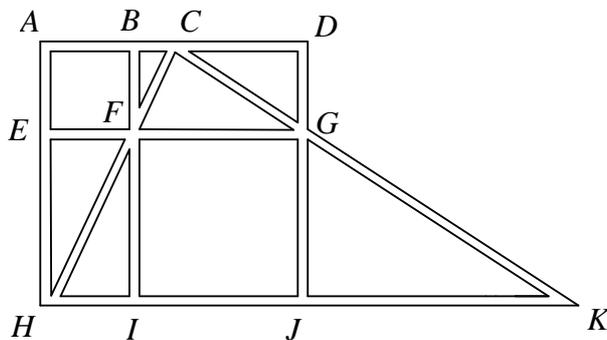
2002 青少年數學國際城市邀請賽個人競賽試題

第一部份：填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

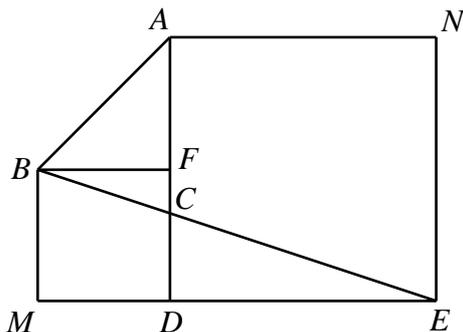
1. 如下圖表所示，在每條橫線上，A、B、C、D、E 分別代表所述年份之五個城市的人口數目。試問從 1992 年至 2002 年，哪一個城市的人口的成長率最大？



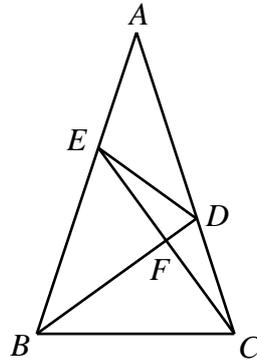
2. 已知 $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$ 。試求 $bx^2 - ax + b$ 的數值。
3. 已知 x ，要計算 x^8 的值必須經以下三個算術運算步驟： $x^2 = x \cdot x$ 、 $x^4 = x^2 \cdot x^2$ 及 $x^8 = x^4 \cdot x^4$ 。當要計算 x^{15} 的值時，須作以下的五個算術運算步驟：前三個運算如上所述；接著作 $x^{16} = x^8 \cdot x^8$ 和 $x^{15} = x^{16} \div x$ 。試問：要計算 x^{1000} 的值時，至少要作多少次算術運算步驟（乘法及除法）？
4. 設 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 為常數。如果 $P(1) = 10$ 、 $P(2) = 20$ 、 $P(3) = 30$ ，試求 $P(10) + P(-6)$ 的數值？
5. 下圖為某個城市的街道平面圖。警察站崗的位置可看見整條直線街道的情況，請安排三個警察站崗的位置，使得任意一條街道均至少可被一位警察監看到。請寫出對應的三個英文字母，分別代表三位警察站崗的位置。



6. 如下圖所示， $BMDF$ 及 $ADEN$ 是兩個大小不同的正方形。如果三角形 CDE 的面積是 6。試求三角形 ABC 的面積。



7. 有一個十八位數 $\overline{A3640548981270644B}$ ，它被 99 整除。試問滿足上述條件的數對 (A, B) 有多少組？
8. 10 個人排成一排站立在一直線上，第一人走到隊伍的最末端，第二人坐下來，第三人走到隊伍的最末端，第四人坐下來，……，依此方式繼續下去，坐下來的人不再起來走動。重複這程序直到最後只有一個人站立為止。試問最後站立的人原來的位號排在第幾位？
9. 在三角形 ABC 中，分別作三個內角的內角平分線 $\overline{AA_1}$ 、 $\overline{BB_1}$ 、 $\overline{CC_1}$ ，其中 A_1 、 B_1 、 C_1 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 邊上。如果 $\angle ABC = 120^\circ$ 。試求 $\angle A_1B_1C_1$ 的值。
10. x 、 y 、 z 、 k 為實數，若 $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = k$ 。試問滿足上述條件的 k 值有多少個？
11. 設點 L 為正方形 $ABCD$ 的對角線 \overline{AC} 上的一點， $\overline{AL} = 3\overline{LC}$ 。點 K 為 \overline{AB} 的中點。試求 $\angle KLD$ 。
12. 如圖，在三角形 ABC 中， $\angle A = 36^\circ$ 、 $\angle ACB = 72^\circ$ 、 $\angle B$ 的角平分線交 \overline{AC} 於點 D ，由 C 點作 \overline{BD} 的垂線交 \overline{BD} 於點 F ，交 \overline{AB} 於 E 。試問這個圖中有多少個等腰三角形？



第二部份：計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 有兩個相異的二位數，其個位數相同，但是十位數字不同。其中一個數除以 9 所得的商數等於另一個數除以 9 所得的餘數，反之亦然。試問這二個數的相同的個位數字是多少？
2. 已知：

$$(x+y)(x+z) = 15$$

$$(y+z)(y+x) = 18$$

$$(z+x)(z+y) = 30$$

試求 x 、 y 、 z 之值。

3. 如下圖， $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 邊於點 D 、 M 是 \overline{BC} 邊上的中點，並且 $\overline{AD} \parallel \overline{ME}$ 。試證： $\overline{BE} = \overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ 。

